物理数学Ⅰ　演習問題 解答

第 3 章

1. ベクトル$\mathbf{A}(1,2,3)$、$\mathbf{B}(3,1,2)$、$\mathbf{C}(2,3,1)$、および$\mathbf{D}(3,2,1)$のスカラー積$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$、$\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$、$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}$を求めなさい。

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=14$　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=11$　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=11$　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=10$　$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=14$　$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=11$　$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}=13$

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=14$　$\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}=13$　$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}=14$

2. 問題 1 のベクトルのベクトル積を求めなさい。ベクトル積の結果を図で表しなさい。

（1）$\mathbf{A}\times\mathbf{A}$　（2）$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　（3）$\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　（4）$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$　（5）$\mathbf{A}\times\mathbf{D}$　（6）$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$　$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(2\times2-3\times1)\boldsymbol{i}+(3\times3-1\times2)\boldsymbol{j}+(1\times1-2\times3)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=(1\times3-2\times2,2\times1-3\times3,3\times2-1\times1)=(-1,-7,5)=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

$\mathbf{A}\times\mathbf{C}=(-7,5,-1)$　$\mathbf{A}\times\mathbf{D}=(-4,8,-4)$　$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=(-5,1,7)$

3. 問題 1 のベクトルで張られる平行四辺形の面積を求めなさい。面に立てた法線ベクトルを図次しなさい。

（1）$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$　（2）$\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$　（3）$\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$

(1) 面積は $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{1^2+7^2+(-5)^2}=\sqrt{89}$、方向を示す単位ベクトルは　$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{89}},\frac{7}{\sqrt{89}},\frac{-5}{\sqrt{89}}\right)$

(2) 面積は　$|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|=\sqrt{(-5)^2+1^2+7^2}=\sqrt{75}$　$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}=\left(\frac{-5}{\sqrt{75}},\frac{1}{\sqrt{75}},\frac{7}{\sqrt{75}}\right)$

(3)　$\mathbf{C}\times\mathbf{D}=(1,1,5)$　なので、面積は　$|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|=\sqrt{1^2+1^2+5^2}=\sqrt{27}$　$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}{|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{27}},\frac{1}{\sqrt{27}},\frac{5}{\sqrt{27}}\right)$

4. 次のベクトルで張られる立体の体積を求めなさい。

（1）$\mathbf{E}(1,0,0)$、$\mathbf{F}(0,1,0)$、および$\mathbf{G}(0,0,1)$　（2）$\mathbf{A}(1,2,3)$、$\mathbf{B}(3,1,2)$、および$\mathbf{C}(2,3,1)$

(1)　$\mathbf{E}\times\mathbf{F}=(0,0,1)$　なので　体積は $\mathbf{G}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{F})=1$

(2)　$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(1,7,-5)$　なので　体積は $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=18$

5. 次のベクトルの間の角度をスカラー積とベクトル積を用いて求めなさい。

（1）$\mathbf{A}(1,2,3)$ と $\mathbf{B}(3,1,2)$　（2）$\mathbf{B}(3,1,2)$ と $\mathbf{C}(2,3,1)$　（3）$\mathbf{C}(2,3,1)$ と $\mathbf{D}(3,2,1)$

(1)　$\cos\theta=\frac{A\cdot B}{|A||B|}=\frac{11}{14}$　より $\theta=\cos^{-1}\frac{11}{14}=38.2°$　あるいは、$\sin\theta=\frac{|A\times B|}{|A||B|}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$　より $\theta=\sin^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{14}=38.2°$　ここで、後者の方法はベクトル積の絶対値を用いているので、角度とし

ては、他の可能性として$\theta = 180° - 38.2°$　の可能性もあるが、ベクトルを図示すると角度として38.2°を選択するのが正しいことがわかる。スカラー積を用いた場合はこのような不確定さは無い。

(2) $\cos\theta = \frac{B \cdot C}{|B||C|} = \frac{11}{14}$　より$\theta = \cos^{-1}\frac{11}{14} = 38.2°$　あるいは、$\sin\theta = \frac{|B \times C|}{|B||C|} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$　より$\theta = \sin^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{14} = 38.2°$

(3) $\cos\theta = \frac{C \cdot D}{|C||D|} = \frac{13}{14}$　より$\theta = \cos^{-1}\frac{13}{14} = 21.8°$　あるいは、$\sin\theta = \frac{|C \times D|}{|C||D|} = \frac{\sqrt{26}}{14}$　より$\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{26}}{14} = 21.4°$ 両者の違いは電卓の計算精度による。

6. 三次元空間に張られる結晶格子を考える。結晶格子の単位胞（結晶格子の最小単位空間）の三つの辺をベクトル$\mathbf{A}(a_x, a_y, a_z)$、$\mathbf{B}(b_x, b_y, b_z)$および$C(c_x, c_y, c_z)$とする。この単位胞の側面の面ベクトル（単位胞の外側を向く方向で）を求めなさい。この単位胞の体積を求めなさい。

$\mathbf{A}^* = \dfrac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})}$、$\mathbf{B}^* = \dfrac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})}$、$\mathbf{C}^* = \dfrac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})}$　を成分で表しなさい。これ等を逆格子ベクトルという。ベクトルの方向と長さなどの幾何学的な意味を考えなさい。

更に、次の関係を示しなさい。ベクトルの成分を使わなくても証明できます。

$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C} = 1$　および　$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})} = \left(\begin{array}{c} \dfrac{b_y c_z - b_z c_y}{a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)}, \\ \dfrac{b_z c_x - b_x c_z}{a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)}, \\ \dfrac{b_x c_y - b_y c_x}{a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)} \end{array} \right)$$

他は明らか。

7. 次の位置ベクトルを時間tで微分して速度ベクトルを求め、成分表示しなさい。これ等はどのような運動か説明しなさい。

（1） $\mathbf{r}(x, y, z) = (r_0 \cos\omega t, r_0 \sin\omega t, 0)$　　（2） $\mathbf{r}(x, y, z) = (r_0 \cos\omega t^2, r_0 \sin\omega t^2, 0)$

（3） $\mathbf{r}(x, y, z) = (r_0 \cos\omega t, r_0 \sin\omega t, v_0 t)$　　（4） $\mathbf{r}(x, y, z) = (at\cos\omega t, at\sin\omega t, 0)$

（5） $\mathbf{r}(x,y,z)=\left(ae^{bt}\cos\omega t, ae^{bt}\sin\omega t, 0\right)$　（6） $\mathbf{r}(x,y,z)=\left(r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t, \frac{1}{2}gt^2\right)$

（6） $\mathbf{r}(x,y,z)=\left(at\cos\omega t, at\sin\omega t, v_0 t\right)$

8. 問題 7 の各運動の加速度ベクトルを求め、成分表示しなさい。角速度ベクトルはどの方向を向いていて、大きさはどう変化するか。

9. 質量が m の質点が問題 7 の運動をする。各運動における角運動量ベクトルを成分で与えなさい。角運動量ベクトルが時間的に変化するものと変化しないものとに分けなさい。

10. 問題 7 の運動で、運動エネルギーを求めなさい。時間的に変化するものと変化しないものとに分類しなさい。

11. 次の各曲線の曲率半径を x の関数として与えなさい。

（1） $y=x^3$　（2） $y=x^4$　（3） $y=a\sin x$　（4） $y=e^x$　（5） $y=\frac{1}{x}$

（6） $y=e^{x^2}$　（7） $y=\frac{1}{x^2+1}$　（8） $y=\frac{x}{x^2+1}$